あとがき (Non-standard Methods)

AUTHOR(S):

河田, 敬義

数理解析研究所講究録
304巻 1977年 59-67

あとがき

上智大理工学部　河田敬義

（1） non-standard methods といえば、その創始者である Abraham Robinson の名を挙げないわけにはいかない。彼は 1918年10月6日 ドイツに生れ、イスラエルの Hebrew Univ. に学び、Univ. of London で学位をとった。以後、イギリスで職を得て、後に Univ. of Toronto (カナダ) 1951−57, Hebrew Univ. (イスラエル) 1957−62, Univ. of California, Los Angels (U.S.A.), 1962−67, Yale Univ. (U.S.A.) 1967−74 の Prof. をつとめ、1974年4月11日に亡くなった。K. Gödel は "A. Robinson was the one mathematical logician who accomplished incomparably more than anybody else in making this science fruitful for mathematics" と評している。彼の初期の研究はイギリスにおける流体力学とその応用に向けられていた。1949年の学位論文以来、model theory の研究に進み、1960年以降 non-standard analysis の研究に入った。

Robinson の論文リストは文献［9］p.4〜13 に挙げられている。(著書9篇，論文135篇)。Robinson 教授は、かつて来日し各地大学で講演し、また 1963年に Nagoya Math. J. 22 に寄稿している。

竹内外史氏の non-standard analysis に関する初期の論文 [10] も，このころである。

(2). Non-standard method が整数論に応用され，いちじるしい成果を得たのは，まず J. Ax - S. Kochen [1] の p進体上の Diophantine problem に関する Artin 予想への解答があげられる。(これは ultraproduct の応用という方がよいかも知れない)。Robinson 自身によるいくつかの研究があり，(例えば [4])，それらの中でいちじるしいのが A. Robinson - P. Roquette [6] である。この代数曲線上の整数点の有限性に関する論文は，大きい反響を呼んだ。1977年1月～4月に日本学術振興会の招きで，P. Roquette 教授が来日し，東大での連続講義の他，名大，北大，九大で講演し，京大数理研でのこのシンポジウムに出席し，さらに1977年4月の日本数学会年会で総合講演を行った。これらについては「数学」に報告されるであろう。

(3) P. Roquette 教授の東大での講義は，次のようなものであった。(5回，毎回2時間)

Chap I. General remark on enlargement (2回)

Chap II. Irreducibility theorem of Hilbert (2回)

Chap III. Mordel-Weil finiteness theorem. (1回)

I は整数論でなく一般的な考え方についてであった。

II は論文 [7] に関するものであり，III は今回のシンポジウム

および年会講演と合せて、一つのものである。

Non-standard method は、我が国ではまだ余り広く知られていない。斎藤正彦氏は、1975/10～76/2 の東大数学科における講義にもとづいて、[8] を著わした。河田は同じ時期に、ultraproduct のみによって A. Robinson–P. Roquette [6] の紹介を講義した。それに、今回の Roquette 教授の講演、今回のシンポジウム等を、数えるほどのものしかない。今後次第に広く知られていくようになることを期待したい。

(4) 今回のシンポジウムの中で、第2日午後に一般的討論を行った。そこで、二つのテーマについて話し合われた。

A. "<u>Non-standard method は、どのように導入されるのがわかり易いか？</u>"

non-standard の考え方になれない者にとって、まずその一つの model として、ultraproduct から入っていくのが分りやすいことは確かである。例えば、B で述べるように、整数環 $\mathbb{Z}$ の enlargement ${}^*\mathbb{Z}$ は、どのようなものであるか、という問に対しても、$\mathbb{Z}$ の ultrapower $\prod \mathbb{Z}/\sim$ を考えれば、その性質を理解することができる。また、多くの non-standard 理論も、もっぱら ultraproduct のみを用いて証明することができる。(例えば A. Robinson–P. Roquette [6] についても、ultraproduct で

けで理解される)。しかし、Roquette 教授の意見は、non-standard の方法を理解するためには、なるべく早く ultra-product と切り離して、いわば Axiomatic な方法で理解するのがよいということである。事実 Roquette 教授自身は、Heidelberg 大学で A. Robinson 教授との会話によって、Axiomatic な考え方を会得したとのことである。

但し Axiomatic な方法といっても、今日までの"最も普遍な"方法が、確立されてはいない。

(i) enlargement の公理化によるもの

一つの universe $\mathcal{A}$ を定め、集合 $S \subset \mathcal{A}$ に対して

$$S \longrightarrow {}^*S \subset \mathcal{B} \text{ (別の}$$

が対応し、$S = T \iff {}^*S = {}^*T$,

(a) ${}^*\phi = \phi$, ${}^*(S \cup T) = {}^*S \cup {}^*T$, ${}^*(S \cap T) = {}^*S \cap {}^*T$,
${}^*(S - T) = {}^*S - {}^*T$,

(b) $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ (finite set) $\Longrightarrow {}^*S = \{{}^*x_1, \cdots, {}^*x_n\}$

一般に $x \in S \Rightarrow {}^*x \in {}^*S$. 故に $S \hookrightarrow {}^*S$ であるが

(c) S : infinite $\Longrightarrow S \subsetneqq {}^*S$ (${}^*x$: standard ele.)

(d) $*$ は relation を保つ: e.g. ${}^*(x, y) = ({}^*x, {}^*y)$,
${}^*(S \times T) = {}^*S \times {}^*T$, rel $R \subset S \times T \rightarrow {}^*R \subset {}^*S \times {}^*T$

R : ordering relation $\Rightarrow {}^*R$: ordering relation, 特に $x < y \Rightarrow {}^*x < {}^*y$

f : function $\Longrightarrow {}^*f$: function, 特に $f(x) = y \Rightarrow {}^*f({}^*x) = {}^*y$

R : module, ring, field, ‥ $\Rightarrow {}^*R$: module, ring, field, ‥

(e) R : concurrent relation とは. $D_R = \{x \in S \mid \exists y \in T,\ (x,y) \in R\}$ とおくとき, $R \subset S \times T$ において, $\forall$ finite $x_1, \cdots, x_n \in D_R$ $\exists y \in T$; $(x_i, y) \in R$ for $i = 1, \cdots, n$ とする.

(Axiom) For every concurrent relation R $\exists \eta \in {}^*T$ such that $({}^*x, \eta) \in {}^*R$ for $\forall x \in D_R$.

(存在定理) $\forall$ universe $\mathcal{A}$ において, $\exists$universe $\mathcal{B}$ と enlargment functor $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が存在する. (e.g. ultraproduct method を用いよ)

(定理). If a "statement" about set (and structure) is true in $\mathcal{A}$, then it remains true in the enlargements.

但し quantifier $\forall, E$ は $\forall x \in S$, $\exists x \in S$ $(S \subset \mathcal{A})$ に限る

(定義) $S \in \mathcal{A}$, ${}^*S \in \mathcal{B}$ とする. ${}^*S$ の元を internal element という. 又 $T \in \mathcal{A}$ に対して ${}^*\mathcal{P}(T)$ の元を internal set (in $\mathcal{B}$) という

また. $S = \{x \in T \mid \alpha(x)$ holds where α is a formula in the formal language$\}$ $\Longrightarrow$ ${}^*S = \{x \in {}^*T \mid {}^*\alpha(x)$ holds$\}$ where ${}^*\alpha$ is a formula by the same def. as α. ‥‥

(ii) Robinson - Zakon [5] は set theoretic charact. of enlargements を与えている

また Brinkman という人の Lecture Note, etc. もある

(iii) 最近 Princeton Univ. の Edward Nelson [2] は

Non-standard analysis への新らしい導入法を企てた. それは Internal set theory と呼ばれる ZF (Zermelo-Fränkel set theory) から出発し, $\in$ の他に新に standard という predicate を加える. この theory の Axiom は, 3つの ZF の axiom の他に, 三つの新しい axiom をつけ加える. まず formula が internal とは, ZF の formula で standard という predicate を含まぬものとする. その他の formula を external という.

Axiom T (transfer principle): $A(x, t_1, \dots, t_k)$ internal formula with free variables $x, t_1, \dots, t_k$ and no other free var.

(T) $\forall^{st} t_1 \cdots \forall^{st} t_k \, (\forall^{st} x \, A(x, t_1, \dots, t_k)) \Rightarrow \forall x \, A(x, t_1, \dots, t_k))$

但し $\forall^{st} x$: for $\forall x$ (x standard) とする

Axiom I (principle of idealization) = (Axiom for concurrent rel.)

$B(x, y)$ internal formula, x, y free var, 他の free var. があってもよい

(I) $\forall^{st\,fin} z \, \exists x \, \forall y \in z \;\; B(x, y) \iff \exists x \, \forall^{st} y \;\; B(x, y)$

Axiom S (principle of standardization) $C(z)$ は internal でも external でもよい. z free variable, C は他の var. を含んでもよい

(S) $\forall^{st} x \, \exists^{st} y \, \forall^{st} z \, (z \in y \iff z \in x \wedge C(z))$

この Nelson の方法は, 今後広く用いられるのではないであろうか?

B $^*\mathbb{Z}$ はどんな構造を持つか？

enlargement を公理化すると，$^*S$ はどんな構造の集合であるかがなかなかわかりにくい．例えば $^*\mathbb{Z}$ は？

Roquette 教授は，次のような説明を行った．

(1) $\mathbb{Z}$ は整域であるから $^*\mathbb{Z}$ も整域である

(2) $\mathbb{Z}$ は torsion free $\Longrightarrow$ $^*\mathbb{Z}$ も torsion free

(3) $\mathbb{Z}$ は lin. ordered $\Longrightarrow$ $^*\mathbb{Z}$ も lin. ordered

(4) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N} \Rightarrow {}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{N} \cup \{0\} \cup -{}^*\mathbb{N}$

(5) $\mathbb{Z}$ の商の体は $\mathbb{Q}$ $\longrightarrow$ $^*\mathbb{Z}$ の商の体は $^*\mathbb{Q}$

(6) $\mathbb{Z}$ は infinite $\Longrightarrow$ $\mathbb{Z} \subsetneqq {}^*\mathbb{Z}$

(7) $\eta \in {}^*\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ (i.e. η: external natural n.) $\Longrightarrow$ $\eta > x$ for $\forall x \in \mathbb{N}$

(8) $^*\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ に minimal element は存在しない

(9) $P = \{p \in \mathbb{N} \mid x|p \Rightarrow x = 1 \text{ or } p\}$ (set of primes)

$\Longrightarrow$ $^*P \subset {}^*\mathbb{N}$. $^*P$: set of primes in $^*\mathbb{N}$. P: infinite $\Rightarrow P \subsetneqq {}^*P$.

(10) $\mathbb{Z}$ は principal ideal domain, but $^*\mathbb{Z}$ is not P.I.D

しかし Bezout domain である．

(11) $\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}_p$ (p-adic integer) は $^*\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}_p$ に延長される．$\mathbb{Z} \ni x = x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n$ $(0 \leqq x_i < p)$ を $^*\mathbb{Z} \ni x$ に対して $n \in {}^*\mathbb{N}$ にしてあてはめる．その展開の finite part をとれば $\hat{\mathbb{Z}}_p$ となる．

(12) $0 \longrightarrow \mu \longrightarrow {}^*\mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{\substack{p \\ p \text{ standard}}} \hat{\mathbb{Z}}_p$ = adele ring

ここに $\mu =$ (monad of 0) $=$ ideal of ${}^*\mathbb{Z} = \bigcap$ standard ideals

また $\forall$ nonstandard prime q: $\mu \not\subset {}^*\mathbb{Z}q$.

(13) M: external maximal ideal containing μ. $\Rightarrow$ M is a non principal ultrafilter on the set of primes P of $\mathbb{Z}$.

$${}^*\mathbb{Z}/M = \prod_{p \in P} \mathbb{F}_p / \mathcal{U}_M = \text{Ax field (of char 0)}$$

$K = {}^*\mathbb{Z}/M$ has the following structures:

(i) $\mathrm{Gal}(K^a/K) \cong \hat{\mathbb{Z}} = A(\mathbb{Z}) = \prod_{p \in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$

(ii) (pseudo alg. closed)

$\forall$ abs irred $f(x, y) = 0$ over K has infinitely many solutions $x, y \in K$.

Conversely, (i), (ii) characterize K.

etc.

文　献

[1] J. Ax and S. Kochen. Diophantine problems over local fields I. Amer. J. of Math. 87 (1965), II. ibid, 605-698 III Annals of Math., 83 (1966).

[2] Edward Nelson: Internal set theory: A new approach to non-standard analysis. Lecture Note (1977). An expanded version of an invited address given at Summer Meeting 1976 in Toronto.

[3] A. Robinson. Non-standard analysis, North-Holland, 1966

[4] A. Robinson, Non-standard arithmetic, Bull Amer. Math. Soc. 73 (1967), 818 − 843

[5] A. Robinson − E. Zakon, A set-theoretical characterization of enlargements. Applications of model theory to algebra, analysis and probability, Holt, Rinehart and Winston, New York (1969), 109 − 122

[6] A. Robinson − P. Roquette. On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning Diophantine equations J. of Number Theory, 7 (1975), 121 − 176

[7] P. Roquette, Non-standard aspects of Hilbert's irreducibility theorem, Springer Lecture Note No. 498, (1975), 231 − 275

[8] 斎藤正彦, 超積と超準解析, 1976

[9] D. H. Saracino − V. B. Weispfenning (ed.) Model theory and algebra. A memorial tribute to Abraham Robinson Springer Lecture Notes in Math. No. 498 (1975)

[10] G. Takeuti, Dirac spaces. Proc. Japan Acad. 38 (1962), 414 − 418

[11] G. Takeuti,